1 Основные теоремы и определения

1.1 Теорема Вейерштрасса

Определение: Функционал $J(u)$ полунепрерывен снизу в точке $u_0 \in U$, если

$$\forall \{u_n\} \subset M : \quad \rho(u_n, u_0) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varliminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u_0).$$

Теорема 1 (Метрический вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть M — полное метрическое пространство, U — компакт, $J(u)$ полунепрерывен снизу на U. Тогда*

1. *$J_* > -\infty$ — нижняя грань функционала конечна;*
2. *$U_* \neq \emptyset$ — нижняя грань достигается;*
3. *$\forall \{u_n\} \subset U : J(u_n) \to J_* \Rightarrow \rho(u_n, U_*) \to 0$ — любая минимизирующая последовательность приближается ко множеству U_*.*

Определение: Если в задаче выполняются условия 1, 2, 3 теоремы 1, то она корректно поставлена.

Определение: Пусть H — гильбертово пространство. Последовательность $\{f_k\} \subset H$ слабо сходится к $f_0 \in H$, если $\forall h \in H : \quad < f_k, h > \to < f_0, h >$.

Определение: Подмножество U гильбертово пространства H слабо компактно, если

$$\forall \{u_k\} \subset U \quad \exists \{u_{k_m}\}, \exists u_0 \in U : \quad u_{k_m} \overset{сл}{\to} u_0.$$

Замечание: Выпуклое замкнутое ограниченное множество слабо компактно.

Определение: $J(u)$ слабо непрерывен (слабо полунепрерывен снизу) в точке u_0, если

$$\forall u_k \overset{сл}{\to} u_0 \quad \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J(u_0) \quad \left(\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u_0) \right).$$

Замечание: Выпуклый полунепрерывный снизу функционал слабо полунепрерывен снизу.

Теорема 2 (Слабый вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть H — гильбертово пространство, U — слабо компактно, $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу на U. Тогда*

1. *$J_* > -\infty$ — нижняя грань функционала конечна;*
2. *$U_* \neq \emptyset$ — нижняя грань достигается;*
3. *$\forall \{u_k\} \subset U$: если $J(u_k) \to J_*$, то любая слабая предельная точка $\{u_k\}$ лежит в U_*.*

Определение: Если выполняются условия 1, 2, 3 теорема 2, то задача слабо корректно поставлена.

1.2 Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

Определение: Пусть X, Y — нормированные пространства. Функция $F : X \to Y$ — дифференцируема в точке $x_0 \in X$ по Фреше, если $\exists F'(x_0) \in \mathcal{L}(X \to Y)$: $F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)\, h + o(\|h\|_X)$, $\forall h \in X$.

Замечание: В случае $X = H$, $Y = \mathbb{R}^1$ получается $F(x_0 + h) - F(x_0) = \langle F'(x_0), h\rangle_H + o(h)$.

Замечание: Если $F : H \to \mathbb{R}^1$ и $\exists F''(x_0)$, то справедливо

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\langle F'(x_0),h\rangle_H+\frac{1}{2}\langle F''(x_0)\,h,h\rangle_H+o(\|h\|_H^2),\quad \forall h\in H,$$

однако обратное неверно.

Замечание: Пусть X, Y, Z — нормированные пространства; $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$, $\exists F'(x_0)$, $\exists G'(F(x_0))$, тогда $\exists (G\circ F)'(x_0) = G'(F(x_0))\,F'(x_0) \in \mathcal{L}\,(X \to Z)$.

1.2.1 Формулы конечных приращений

$$J(u+h)-J(u)=\langle J'(u+\theta\,h),h\rangle_H,\quad \theta\in[0,1].$$
$$\langle J'(u+h)-J'(u),g\rangle_H=\langle J''(u+\theta\,h)h,g\rangle_H,\quad \theta\in[0,1].$$

1.2.2 Задача управления линейной динамической системой

$$x'(t)=\mathcal{A}(t)\,x(t)+\mathcal{B}(t)\,u(t)+\mathcal{F}(t),\quad t_0<t<T,$$
$$x(t_0)=x_0,\quad u\in U\subset L^2(t_0,T),$$
$$\mathcal{A}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \mathcal{B}(t)\in\mathbb{R}^{n\times r},\quad \mathcal{F}(t)\in\mathbb{R}^n,\quad u(t)\in\mathbb{R}^r,\quad x(t)\in\mathbb{R}^n,$$
$$J_1(u)=\int_{t_0}^{T}\|x(t;u)-y(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}\,dt\to\inf\quad \text{или}\quad J_2(u)=\|x(T;u)-y\|^2_{\mathbb{R}^n}\to\inf.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{F}(t) \in L^\infty(t_0,T)$, множество $U \subset L^2(t_0,T)$ допустимых управлений слабо компактно, целевой элемент $y \in L^2(t_0,T)$, тогда обе задачи минимизации являются слабо корректно поставленными.*

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, и кроме того $x_0 = 0$, $\mathcal{F}(t) \equiv 0$. Тогда оба функционала $J_1(u)$, $J_2(u)$ дифференцируемы по Фреше, их градиенты липщицевы на $L_2(t_0,T)$ ($L = 2\|A^*\|\|A\|$, где $Au(\cdot) = x(\cdot;u)$), вычисляются по формулам*

$$J_1'(u)=2\mathcal{B}^T(t)\,\psi(t),\qquad \begin{cases}\psi'=-\mathcal{A}^T\,\psi-(x(t;u)-y(t)),\\ \psi(T)=0;\end{cases}$$

$$J_2'(u)=2\,\mathcal{B}^T(t)\,\psi(t),\qquad \begin{cases}\psi'=-\mathcal{A}^T\psi,\\ \psi(T)=x(T;u)-y.\end{cases}$$

1.3 Элементы выпуклого анализа

Определение: Пусть H — гильбертово пространство, множество $U \subset H$ — выпуклое. Тогда функционал $J(u)$ выпуклый, если

$$\forall u,v\in U,\forall\alpha\in[0,1]\quad J(\alpha\,u+(1-\alpha)v)\leqslant\alpha\,J(u)+(1-\alpha)J(v).$$

Функционал называется строго выпуклым, если последнее неравенство выполняется в строгой форме.

Определение: Функционал $J(u)$ сильно выпуклый с коэффициентом $\varkappa > 0$, если

$$\forall u,v\in U,\forall\alpha\in[0,1]\quad J(\alpha\,u+(1-\alpha)v)\leqslant\alpha\,J(u)+(1-\alpha)J(v)-\varkappa\,\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2_H.$$

Теорема 5 (О локальном минимуме выпуклой функции). *Пусть множество $U \subset H$ — выпуклое, функционал $J(u)$ — выпуклый на U, $J_* > -\infty$. Тогда:*

1. *Точка локального минимума есть точка глобального минимума.*

2. *Если* $U_* \neq \emptyset$, *то* U_* *выпуклое.*

3. *Если* $U_* \neq \emptyset$ *и* $J(u)$ *строго выпуклый, то* $U_* = \{u_*\}$, *т.е. состоит из одного элемента.*

Теорема 6 (Сильно выпуклый вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть* H *— гильбертово пространство;* $U \subset H$ *— выпуклое, замкнутое (не обязательно ограниченное) множество;* $J(u)$ *— полунепрерывен снизу и сильно выпуклый. Тогда*

1. $J_* > -\infty$;

2. $U_* \neq \emptyset$, $U_* = \{u_*\}$;

3. $\forall \{u_k\}_{k=1}^{\infty} : J(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_* \Rightarrow \varkappa \|u_k - u_*\|_H^2 \leqslant J(u_k) - J(u_*) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$

Теорема 7 (Критерий выпуклости функционала). *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $U \subset H$ *— выпуклое множество,* $J(u) \in C^1(U)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) $J(u)$ *выпуклый;*

b) $\forall u, v \in U : J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_H$ *(т.е. любая касательная лежит ниже графика);*

c) $\forall u, v \in U : \langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_H \geqslant 0$ *(монотонность* $J'(u)$*);*

Если, кроме того, $J(u) \in C^2(U)$ *и* $\operatorname{int} U \neq \emptyset$, *то*

d) $\forall u \in U, \forall h \in H : \langle J''(u)h, h\rangle_H \geqslant 0.$

Теорема 8 (Критерий сильной выпуклости функционала). *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $U \subset H$ *— выпуклое множество,* $J(u) \in C^1(U)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a') $J(u)$ *сильно выпуклый с коэффициентом* $\varkappa > 0$;

b') $\forall u, v \in U : J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_H + \varkappa \|u - v\|_H^2$;

c') $\forall u, v \in U : \langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_H \geqslant 2\varkappa \|u - v\|_H^2$ *(сильная монотонность градиента).*

Если, кроме того, $J(u) \in C^2(U)$ *и* $\operatorname{int} U \neq \emptyset$, *то*

d') $\forall u, v \in U, \forall h \in H : \langle J''(u)h, h\rangle_H \geqslant 2\varkappa \|h\|_H^2.$

Теорема 9 (Критерий экстремальности). *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $U \subset H$ *— выпуклое множество,* $J(u) \in C^1(U)$, $U_* \neq \emptyset$. *Тогда*

1. *Если* $u_* \in U_*$, *то* $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle_H \geqslant 0$, $\forall u \in U$.

2. *Если* $u_* \in \operatorname{int} U \cap U_*$, *то* $J'(u_*) = 0$ *(условие Ферма).*

3. *Если* $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle_H \geqslant 0$, $\forall u \in U$ *и* $J(u)$ *выпуклый, то* $u_* \in U_*$.

1.4 Метрическая проекция

`Определение:` Пусть M — метрическое пространство, $\rho(x, y)$ — метрика, $U \subset M$, $h \in M$. Метрическая проекция h на множество M —

$$p = \operatorname{pr}_U h = \underset{x \in U}{\arg\min}\, \rho(x, h).$$

Теорема 10 (О свойствах проекции в гильбертовых пространствах). *Пусть H — гильбертово пространство, $U \subset H$ — выпуклое замкнутое множество, тогда:*

1. $\forall h \in H:\ \exists! \operatorname{pr}_U h$;
2. $p = \operatorname{pr}_U h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle p - h, u - p \rangle_H \geqslant 0, \forall u \in U, \\ p \in U; \end{cases}$
3. $\|\operatorname{pr}_U f - \operatorname{pr}_U g\|_H \leqslant \|f - g\|_H$ *(нестрогая сжимаемость).*

Теорема (Проекционная форма критерия оптимальности). *Пусть H — гильбертово пространство, $U \subset H$ — выпуклое множество, функционал $J(u) \in C^1(U)$ выпуклый. Тогда*

$$u_* \in U_* \quad \Rightarrow \quad u_* = \operatorname{pr}_U(u_* - \alpha\, J'(u_*)),\ \forall \alpha \geqslant 0.$$

1.5 Численные методы оптимизации

1.5.1 Градиентный метод (метод скорейшего спуска)

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in H$ (без ограничений). Пусть $u_0 \in H$ произвольно,

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} J_k(\alpha), \quad J_k(\alpha) = J(u_k - \alpha\, J'(u_k)).$$

Теорема 11 (О сходимости метода скорейшего спуска). *Пусть функционал $J'(u) \in C^1(H)$ сильно выпуклый с коэффициентном $\varkappa > 0$, градиент $J'(u)$ — липшицев с $L > 0$:*

$$\|J'(u) - J'(v)\|_H \leqslant L\|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

Тогда $\exists! u_*$, $\forall u_0 \in H$: $u_k \to u_*$:

$$\varkappa\|u_k - u_*\|_H^2 \leqslant J(u_k) - J(u_*) \leqslant q^k(J(u_0) - J(u_*)), \quad \text{где } q = 1 - \frac{2\varkappa}{L} \in [0, 1].$$

1.5.2 Непрерывный аналог градиентного метода

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in H$ (без ограничений). Пусть $u_0 \in H$ произвольно,

$$\begin{cases} u'(t) = -\beta(t) J'(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Теорема 12 (О сходимости непрерывного градиентного метода). *Пусть функционал $J(u) \in C^1(H)$ сильно выпуклый с коэффициентом $\varkappa > 0$, градиент $J'(u)$ липшицев на H, $\beta(t) \geqslant \beta_0 > 0$. Тогда $\forall u_0 \in H$: $u(t) \underset{t \to \infty}{\to} u_*$, причём*

$$\|u(t) - u_*\|_H \leqslant \|u_0 - u_*\|_H e^{-2\beta_0 \varkappa t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

1.5.3 Метод проекции градиента

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in U \subset H$. Пусть $u_0 \in U$ произвольно,

$$u_{k+1} = \operatorname{pr}_U(u_k - \alpha_k J'(u_k)).$$

Теорема 13 (О сходимости метода проекции градиента). *Пусть функционал $J(u) \in C^1(U)$ сильно выпуклый на U, множество U — выпукло и замкнуто в H (необязательно ограничено), $J'(u)$ липщицев на U с постоянной $L > 0$, $\alpha_k = \alpha \in \left(0, \frac{4\varkappa}{L}\right)$. Тогда $\forall u_0 \in U$: $u_k \underset{k \to \infty}{\to} u_*$, причём*

$$\|u_k - u_*\|_H \leqslant q^k(\alpha)\|u_0 - u_*\|_H, \quad q(\alpha) = \sqrt{1 - 4\varkappa\alpha + \alpha^2 L^2} \in (0, 1).$$

1.5.4 Метод условного градиента (метод линеаризации)

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in U \subset H$, U — ограниченное. Пусть $u_0 \in U$ произвольно,

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \quad \bar{u}_k = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U} \langle J'(u_k), u - u_k \rangle_H, \quad \alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)).$$

Теорема 14 (О сходимости метода условного градиента). *Пусть функционал $J(u) \in C^1(U)$ выпуклый, множество U — выпуклое, замкнутое, ограниченное (имеет диаметр D), градиент $J'(u)$ липщицев на U с постоянной $L > 0$. Тогда $J(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_*$, причём*

$$J(u_k) - J_* \leqslant \frac{J(u_0) - J_*}{1 + \frac{J(u_0) - J_*}{2LD^2} k} = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Если кроме того $J(u)$ сильно выпуклый с коэффициентом $\varkappa > 0$, то

$$\|u_k - u_*\|_H \leqslant \sqrt{\frac{J(u_k) - J_*}{\varkappa}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

1.5.5 Метод Ньютона

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in U \subset H$. Пусть $u_0 \in U$ произвольно,

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \quad \alpha_k \in (0, 1],$$

$$\bar{u}_k = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U} J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle_H + \tfrac{1}{2}\langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \rangle_H.$$

Теорема 15 (О сходимости метода Ньютона при $\alpha_k = 1$). *Пусть функионал $J(u) \in C^2(U)$ сильно выпуклый с коэффициентом $\varkappa > 0$, вторая производная $J''(u)$ липщицева на U с постоянной $L > 0$, $U \subset H$ — выпуклое, замкнутое (необязательно ограниченное), $\operatorname{int} U \neq \emptyset$. Тогда $\forall u_0 \in U$: $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_*$, причём*

$$\|u_k - u_*\|_H \leqslant \frac{4\varkappa}{L} \frac{q^{2^k}}{1 - q^{2^k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \textit{если} \quad q = \frac{L}{4\varkappa}\|u_1 - u_0\|_H < 1.$$

1.5.6 Метод сопряжённых градиентов

Рассматривается задача $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle \to \inf$, $u \in \mathbb{R}^n$, $A = A^* > 0$. Пусть $u_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольное начальное приближение.

$$\begin{cases} u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1}, \\ p_k = -J'(u_k) + \beta_{k-1} p_{k-1}, \\ p_0 = -J'(u_0), \end{cases} \quad \alpha_k = -\frac{\langle J'(u_0), p_k \rangle}{\|p_k\|_A^2}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\langle J'(u_k), p_{k-1} \rangle_A}{\|p_{k-1}\|_A^2}.$$

Здесь

$$\langle u, v \rangle_A = \langle Au, v \rangle.$$

Вектора $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, ортогональный с весом A, т.е. $\langle p_m, p_k \rangle_A = 0$, $\forall k \neq m$.

Лемма (Об экстремальных свойствах α_k). *Пусть $H = \mathbb{R}^n$, $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle$, $A = A^* => 0$, $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ — система векторов, ортогональных с весом A, тогда*

$$\alpha_k = -\frac{\langle J'(u_0), p_k \rangle}{\|p_k\|_A^2} = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \in \mathbb{R}^1} J(u_k + \alpha p_k), \quad \langle J'(u_k), p_{k-1} \rangle = 0, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 16 (О конечной сходимости метода сопряжённых градиентов в $\mathbb{R}^n$). *Метод сопряженных градиентов обладает следующими свойствами:*

1. $\langle p_k, p_m \rangle_A = 0$, $\forall k \neq m$;
2. $\langle J'(u_k), J'(u_m) \rangle = 0$, $\forall k \neq m$;
3. $\langle J'(u_k), p_m \rangle = 0$, $\forall m \leqslant k-1$;

то есть метод сходится за конечное число шагов.

Общий случай В случае $\dim H \leqslant \infty$, $J(u)$ — общего вида схема вычислений остаётся той же, а коэффициенты α_k, β_k вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \in \mathbb{R}^1} J(u_k + \alpha p_k), \quad \beta_k = \frac{\langle J'(u_{k+1}), J'(u_{k+1}) - J'(u_k) \rangle}{\|J'(u_k)\|^2}$$

Можно показать, что такой метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

1.5.7 Метод покоординатного спуска

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in \mathbb{R}^n$ (без ограничений).

Фиксируем $\{p_i\}_{i=1}^n$ — произвольный базис в $\mathbb{R}^n$, $\alpha_0 > 0$ — стартовй шаг, $\lambda \in (0,1)$ — коэффициент дробления, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное приближение. Договоримся считать, что $p_{n+k} = p_k$.

Просматриваем точки $u_k \pm \alpha_k p_{k+1}$. Если $J(u_k \pm \alpha_k p_{k+1}) < J(u_k)$, то шаг считается удачным, полагаем $u_{k+1} = u_k \pm \alpha_k p_{k+1}$ (из двух значений $J(u)$ выбирается меньшее), $\alpha_{k+1} = \alpha_k$.

Иначе шаг считается неудачным, $u_{k+1} = u_k$. Если число неудачных шагов подряд равно n, то $\alpha_{k+1} = \lambda \alpha_k$.

Теорема 17 (О сходимости метода покоординатного спуска). *Пусть функционал $J(u) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ выпуклый, множество $M(u_0) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid J(u) \leqslant J(u_0)\}$ ограничено. Тогда $J(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_*$, $\rho(u_k, U_*) \underset{k\to\infty}{\to} 0$.*

1.6 Задачи линейного программирования. Сиплекс-метод

Общая задача линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle a_i, u \rangle = b_i, i = \overline{1,m}, \langle a_i, u \rangle \leqslant b_i, i = \overline{m+1,s} \right\}.$$

Введём обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{m+1} \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(s-m)\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_{m+1} \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s-m},$$

тогда $U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; Au = b, \bar{A}u \leqslant \bar{b} \right\}$.

Общая задача линейного программирования сводится к канонической:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid u \geqslant 0, Au = b \}.$$

`Определение`: Точка $u \in U$ называется угловой, если

$$x, y \in U, \quad \alpha \in (0,1), \quad u = \alpha x + (1-\alpha) y \quad \Rightarrow \quad x = y = u.$$

Теорема 19 (Критерий угловой точки в задаче линейного программирования). *Пусть*

$$A = (A_1|\dots|A_n), \quad \operatorname{rank} A = r \geqslant 1.$$

Точка $v \in U$ — угловая тогда и только тогда, когда

$$\exists j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}, \quad j_i \neq j_k, \quad i \neq k,$$

$A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ — линейно независимы, и

$$A_{j_1} v_{j_1} + \dots + A_{j_r} v_{j_r} = b, \quad v_{j_k} \geqslant 0, \quad k \in \{1, \dots, r\}, \quad v_{j_k} = 0, \quad k > r.$$

Определение: Пусть v — фиксированная угловая точка, тогда

1. $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ — базис точки v;
2. $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ — базисные координаты точки v;
3. $u_{j_1}, \dots, u_{j_r}$ — базисные переменные точки v;
4. $I(v) = \{j_1, \dots, j_r\}$ — базисные номера координат точки v;
5. u_j, $j \neq j_k$ — свободные переменные точки v.

Определение: Угловая точка v невырожденная, если $v_{j_k} > 0$, $\forall k \in \{1, r\}$.

Теорема 20. *В общей задаче линейного программирования справедливо:*

1. *Если $U \neq \emptyset$, то в U найдётся угловая точка.*
2. *Если $J_* > -\infty$, то $U_* \neq \emptyset$.*
3. *Если $U_* \neq \emptyset$, то в U_* найдётся угловая точка U.*

1.7 Методы снятия ограничений

1.7.1 Метод штрафных функций

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$,

$$u \in U = \{ u \in U_0 \mid g_1(u) \leqslant 0, \dots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \dots, g_s(u) = 0\}.$$

Штрафная функция:

$$P(u) = \sum_{i=1}^{s} \left| g_i^+(u) \right|^{p_i}, \quad g_i^+(u) = \max\{0, g_i(u)\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad g_i^+(u) = |g_i(u)|, \quad i = \overline{m+1, s}.$$

Вместо исходной задачи решается последовательность задач

$$\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u) \to \inf, \quad u \in U_0.$$

Здесь минимум вычисляется приближённо:

$$u_k \in U_0: \quad \Phi_{k*} = \inf_{u \in U_0} \Phi_k(u) \leqslant \Phi_k(u_k) \leqslant \Phi_{k*} + \varepsilon_k.$$

Теорема 21 (О сходимости метода штрафных функций). *Пусть функции $J(u)$, $g_i^+(u)$ слабо полунепрерывны снизу на U_0, множество U_0 слабо замкнуто в H,*

$$J_0 = \inf_{u \in U_0} J(u) > -\infty,$$

множество $U(\delta) = \left\{ u \in U_0 \;\middle|\; \left| g_i^+(u) \right| \leqslant \delta \right\}$ ограничено при некотором $\delta > 0$; $A_k \to \infty$, $\varepsilon_k \to 0$. Тогда $J(u_k) \to J_*$ и любая слабая предельная точка $\{u_k\}$ лежит в U_*.

1.7.2 Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$,

$$u \in U = \{u \in U_0 \mid g_1(u) \leqslant 0, \dots, g_m(u) \leqslant 0\}.$$

Здесь $U \subset L$, L — линейное (необязательно гильбертово) пространство; J, g_i, U_0 — выпуклые.

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u), \quad \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m).$$

Теорема 22 (Куна, Таккер). *Если $u_* \in U_*$, то $\exists \lambda^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*) \neq 0$, так что*

1. *$\mathcal{L}(u_*, \lambda^*) = \min\limits_{u \in U_0} \mathcal{L}(u, \lambda^*)$ — условие минимума;*
2. *$\lambda_i^* \geqslant 0$, $\forall i \in \{0, m\}$ — условие неотрицательности;*
3. *$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$, $\forall i \in \{1, m\}$ — условие дополняющей нежёсткости;*
4. *Если $u_* \in U$, в ней выполняются условия 1 ÷ 3 и $\lambda_0^* \neq 0$, то $u_* \in U_*$.*

Утверждение (Достаточное условие Слейтера регулярности выпуклой задачи). *Если*

$$\exists u_0 \in U_0 : \quad g_i(u_0) < 0, \quad \forall i \in \{1, m\},$$

то $\lambda_0^* > 0$ для всех λ^*, удовлетворяющих условиям 1 ÷ 3.

`Определение:` Пусть $f(x, y)$: $X \times Y \to \mathbb{R}^1$. Точка $(x_*, y^*) \in X \times Y$ называется седловой, если

$$f(x_*, y) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(x, y^*), \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Теорема 23 (Седловая форма теоремы 22). *Пусть выполняются условия 1 ÷ 3 теоремы 22 и условие регулярности Слейтера, тогда $u_* \in U_*$ тогда и только тогда, когда классическая функция Лагранжа (т.е. $\lambda_0 = 1$) имеет седловую точку $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \mathbb{R}_+^m$.*

1.7.3 Правило множителей Лагранжа для гладких задач

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$,

$$u \in U = \{u \in H \mid g_1(u) \leqslant 0, \dots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1} = 0, \dots, g_{m+s}(u) = 0\}.$$

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i g_i(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{m+s+1}.$$

Теорема 24 (О необходимых условиях оптимальности). *Пусть u_* — точка локального минимума, $J(u)$, $g_i(u) \in C^1[U_\varepsilon]$, тогда $\exists \lambda_0^* \neq 0$, так что*

1. *$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) = 0$ — условие стационарности;*
2. *$\lambda_i^* \geqslant 0$, $i = \overline{0, m}$ — условие неотрицательности;*
3. *$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$, $i = \overline{1, m}$ — условие дополняющей нежёсткости.*

`Определение:` Пусть X — нормированное пространство, $x_0 \in M \subset X$ — граничная точка множества M. Вектор $h \in X$ — касательный ко множеству M в точке x_0, если

$$\exists \varphi(t) : \mathbb{R}^1 \to X : \quad x_0 + th + \varphi(t) \in M, \quad \|\varphi(t)\|_X = o(t), \quad \forall t : |t| < \varepsilon.$$

$T_{x_0} M$ — множество всех касательных векторов ко множеству M в точке x_0.

Теорема (Люстерник). *Пусть X, Y — банаховы, $F : X \to Y$, $M = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$, $x_0 \in M$, $\operatorname{Im} F'(x_0) = Y$. Тогда $T_{x_0} M = \operatorname{Ker} F'(x_0)$.*

1.8 Простейшая задача оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина

Рассматривается задача

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)\, dt + \varphi(x(T)) \to \inf,$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u(\cdot) \in U = \Big\{ u \in L^1(t_0, T) \ \Big|\ u(t) \overset{п.в.}{\in} V \Big\}.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление, $f^0(x, u, t) \in \mathbb{R}^1$ — интегрант, $\varphi(x) \in \mathbb{R}^1$ — терминант, $V \subset \mathbb{R}^r$ — множество допустимых управлений. Считаются заданными t_0, T, x_0, f^0, φ, f, V.

Определение: Функцией Гамильтона-Понтрягина называется

$$\mathcal{H}(x, u, t, \psi) = 1 \cdot f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Теорема 25 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть f^0, φ, f вместе с производными по x непрерывны по совокупности переменных (x, u, t) и Липшиц-непрерывны по (x, u) (с коэффициентом, не зависящим от (x, u)). Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, $x(t) = x(t; u)$, $\psi(t)$ — решение сопряжённой задачи*

$$\begin{cases} \psi'(t) &= -\mathcal{H}_x, \\ \psi(T) &= \varphi_x(x(T)). \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) = \min_{v \in V} \mathcal{H}(x(t), v, \psi(t), t), \quad \forall п.в.\ t \in (t_0, T).$$

1.8.1 Схема применения принципа максимума

$$u(t, x, \psi) = \arg\min_{v \in V} \mathcal{H}(x, v, \psi, t).$$

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x, u(t, x, \psi), t) = \mathcal{H}_\psi, \quad x(t_0) = x_0 \\ \psi'(t) &= -\mathcal{H}_x(x, u(t, x, \psi), \psi, t), \quad \psi(T) = \varphi_x(x(T)). \end{cases}$$

Решая эту краевую задачу, находим функции $x(t)$, $\psi(t)$. Тогда $u(t, x(t), \psi(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

1.8.2 Линеаризованный принцип максимума

В рассматриваемой задаче верно

$$J'(u) = \mathcal{H}_u(x(t), u(t), \psi(t), t).$$

Теорема 26 (Линеаризованный принцип максимума). *Пусть f^0, φ, f вместе с производными по x непрерывны по совокупности переменных (x, u, t) и Липшиц-непрерывны по (x, u) (с коэффициентом, не зависящим от (x, u)). Пусть также f^0_u, f_u Липшиц-непрерывны по (x, u) и $J'(u) = \mathcal{H}_u(x(t), u(t), \psi(t), t)$. Тогда если $u(t)$ — оптимальное управление, $x(t)$ и $\psi(t)$ — оптимальные траектории, то выполняется следующая линеаризация принципа максимума:*

$$\langle \mathcal{H}_u(x(t), u(t), \psi(t), t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^r} = \min_{v \in V} \langle \mathcal{H}_u(x(t), u(t), \psi(t), t), v \rangle_{\mathbb{R}^r}$$

1.9 Регуляризация некорректных экстремальных задач по Тихонову

Рассматривается задача $J(u) \to \inf$, $u \in U \subset H$, H — гильбертово пространство. Пусть $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$, а про сходимость минимизирующей последовательности ко множеству оптимальных элементов ничего не известно.

Пусть $\left|J(u) - \tilde{J}(u)\right| \leqslant \delta(1 + \|u\|_H^2)$, $\forall u \in U$, δ — известный уровень погрешности. Функционал Тихонова:

$$\tilde{T}_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha\|u\|_H^2.$$

Здесь α — параметр регуляризации. Приближённый минимум (ε — погрешность минимизации):

$$\tilde{u} \in U : \quad \tilde{T}_\alpha(\tilde{u}) \leqslant \inf_{v \in U} \tilde{T}_\alpha(v) + \varepsilon.$$

Теорема 27 (О сходимости метода Тихонова). *Пусть $J_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$, $J(u)$ — выпуклый и полунепрерывный снизу на U, множество U — выпуклое, замкнутое*[1]*. Пусть δ, ε, $\alpha \to 0$, причём*

$$\frac{\delta + \varepsilon}{\alpha} \to 0.$$

Тогда

$$\lim J(\tilde{u}) = \lim \tilde{J}(\tilde{u}) = J_*, \quad \|\tilde{u} - u_*\|_H \to 0, \quad \textit{где} \quad u_* = \operatorname*{arg\,min}_{u \in U_*} \|u\|_H.$$

2 Задачи

Задача 1 (3). *Привести примеры функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.*

Решение: $f(x) = x$, $x \in (0,1)$ и $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$.

Задача 2 (3). *Доказать, что единичный шар S в пространстве $C[a,b]$ не является компактным множеством.*

Решение: Рассмотрим пространство $C[0,1]$ с нормой

$$\|u\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Обозначим через $r(x)$ расстояние от x до ближайшего целого числа. Положим $u_n(x) = 2\,r(2^n x)$, $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно что:

- $|u_n(x)| \leqslant 1$, следовательно $u_n \in S$.
- $u_n(0.5^{n+1}) = 2\,r(0.5) = 1$, а $u_{n+m}(0.5^{n+1}) = 2\,r(2^{m-1}) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Итак, $u_n \in S$, $\|u_n - u_{n+m}\|_{C[0,1]} = 1$, следовательно никакая подпоследовательность u_{n_k} не может быть фундаментальной, то есть единичный шар не является компактом.

Задача 3 (3). *Доказать, что пространство $C[a,b]$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ не является гильбертовым.*

Решение: Рассмотрим последовательность функций

$$u_n(t) = \begin{cases} -1, & t \leqslant -\frac{1}{n}, \\ tn, & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & t \geqslant \frac{1}{n} \end{cases} \in C[-1,1].$$

[1] не обязательно ограниченное, поэтому задача некорректная

$$\|u_n - u_{n+m}\|^2_{C[-1,1]} = \int_{-1/n}^{1/n} (u_n(t) - u_{n+m}(t))^2\, dt \leqslant \int_{-1/n}^{1/n} 1\, dt = \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

то есть последовательность u_n фундаментальна. Пусть она сходится к непрерывной функции u, тогда $u(t) = -1$, $t < 0$ и $u(t) = 1$, $t > 0$ (иначе $\|u - u_n\|_{C[-1,1]} \not\to 0$). Как бы мы не доопределили $u(t)$ в нуле, все равно она будет разрывная. Поэтому фундаментальная последовательность u_n не имеет предела в $C[-1,1]$, то есть это пространство не полное, а значит и не гильбертово.

Задача 4 (3). *Доказать, что "паралеллепипед" в $L^2(a,b)$ не является компактным множеством:*

$$U = \big\{ u(t) \in L^2(a,b) \;\big|\; -1 \leqslant u(t) \leqslant 1, \forall \text{п.в. } t \in (a,b) \big\}.$$

Решение: Положим $u_n = \sin \frac{2\pi\, n(t-a)}{b-a} \in U$. Тогда

$$\langle u_n, u_m \rangle_{L^2(a,b)} = \int_a^b \sin \frac{2\pi\, n(t-a)}{b-a} \sin \frac{2\pi\, m(t-a)}{b-a}\, dt =$$

$$= \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt\, dt = \frac{b-a}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t)\, dt = 0,$$

$$\|u_n\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b \sin^2 \frac{2\pi\, n(t-a)}{b-a} = \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 nt\, dt = \frac{b-a}{4\pi n} (nt - \cos nt \sin nt)\Big|_0^{2\pi} = \frac{b-a}{2},$$

$$\|u_n - u_m\|^2_{L^2(a,b)} = \|u_n\|^2_{L^2(a,b)} + \|u_m\|^2_{L^2(a,b)} - 2\langle u_n, u_m \rangle_{L^2(a,b)} = b - a.$$

То есть никакая подпоследовательность u_{n_k} не является фундаментальной, поэтому множество U не является компактом.

Задача 5 (5). *Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление*

$$f(x+y) = f(x) + f_1\, y + \frac{1}{2} f_2\, y^2 + o(y^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

Решение: $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^2}$, $x = 0$. $f(y) = O(y^3) = o(y^2)$, но производная $f'(x) = 3\,x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$ имеет неустранимый разрыв в нуле, поэтому $f(x)$ не является дважды дифференцируемой в этой точке.

Задача 6 (3). *Вычислить первые и вторые производные функционала*

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle A\, u, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H, \quad A \in \mathcal{L}\,(H \to H), \quad f \in H,$$

H — гильбертово пространство.

Решение:

$$J(u+h) - J(u) = \frac{1}{2} \langle A(u+h), u+h \rangle_H - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, h \rangle_H =$$

$$= \frac{1}{2} \langle Ah, u \rangle_H + \frac{1}{2} \langle Au, h \rangle_H - \langle f, h \rangle_H + o(\|h\|_H) = \frac{1}{2} \langle A^* u + Au, h \rangle_H - \langle f, h \rangle_H + o(\|h\|_H),$$

откуда по определению $J'(u) = \frac{1}{2}(A + A^*)u - f$.

$$J'(u+h) - J'(u) = \frac{1}{2}(A + A^*)(u+h) - \frac{1}{2}(A + A^*)u = \frac{1}{2}(A + A^*)h,$$

откуда по определению $J''(u) = \frac{1}{2}(A + A^*)$.

Задача 7 (4). *Вычислить первые и вторые производные функционала* $J(u) = \|u\|_H$, H — *гильбертово пространство.*

Решение:

Пусть $J'(u) = v \in H$, $J''(u) = w \in \mathcal{L}\,(H \to H)$, тогда

$$\langle v,h\rangle_H + \frac{1}{2}\langle w\,h,h\rangle_H + o(\|h\|_H^2) = \|u+h\|_H - \|u\|_H = \frac{\|u+h\|_H^2 - \|u\|_H^2}{\|u+h\|_H + \|u\|_H} =$$

$$= \frac{2\langle u,h\rangle_H + \langle h,h\rangle_H}{\underbrace{2\|u\|_H}_{a} + \underbrace{\langle v,h\rangle_H}_{x} + \underbrace{\frac{1}{2}\langle wh,h\rangle_H + o(\|h\|_H^2)}_{o(x)}} = \left\{ \frac{1}{a+x+o(x)} = \frac{1}{a}(1 - \frac{x}{a} + o(x)) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\|u\|_H}\left(2\langle u,h\rangle_H + \langle h,h\rangle_H\right)\left(1 - \frac{\langle v,h\rangle_H}{2\|u\|_H} + o(\|h\|_H)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\|u\|_H}\left(2\langle u,h\rangle_H + \langle h,h\rangle_H - \frac{\langle u,h\rangle_H\langle v,h\rangle_H}{\|u\|_H}\right) + o(\|h\|_H^2).$$

Приравняв в обоих частях равенства члены одинакового порядка малости, получаем:

$$\langle v,h\rangle_H = \left\langle \frac{u}{\|u\|_H}, h\right\rangle_H \quad \Rightarrow \quad J'(u) = v = \frac{u}{\|u\|_H};$$

$$\langle wh,h\rangle_H = \left\langle \frac{h}{\|u\|_H} - \frac{\langle u,h\rangle_H v}{\|u\|_H^2}, h\right\rangle_H = \left\langle \frac{h}{\|u\|_H} - \frac{\langle u,h\rangle_H u}{\|u\|_H^3}, h\right\rangle_H \quad \Rightarrow$$

$$J''(u)h = wh = \frac{h}{\|u\|_H} - \frac{\langle u,h\rangle_H u}{\|u\|_H^3}.$$

Осталось показать, что первая и вторая производные действительно существуют. Это действительно так, потому что $J(u) = \sqrt{\|u\|_H^2}$, $J'(u) = \dfrac{u}{\|u\|_H}$ — суперпозиции дифференцируемых отображений.

Задача 8 (5). *Вычислить градиент функционала*

$$J(u) = \int_0^l |y(x;u) - z(x)|^2\,dx$$

в пространстве $L^2(0,l)$*, где* $y(x) = y(x;u)$ *- решение краевой задачи*

$$\begin{cases} (k(x)\,y'(x))' - q(x)\,y(x) = -u(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$ — *заданные функции.*

Решение: Введём оператор $A : L^2(0,l) \to L^2(0,l)$, $Au = y(\cdot;u)$. Тогда

$$J(u) = \int_0^l |(Au)(x) - z(x)|^2\,dx = \|Au - z\|_{L^2(0,l)}^2 \Rightarrow$$

$$J'(u) = 2\,A^*(Au - z) = 2\,A^*(y(\cdot;u) - z).$$

Осталось только найти оператор A^*. Пусть $\psi(x) \in L^2(0,l)$ — произвольная функция.

$$\langle Au, v\rangle_{L^2(0,l)} = \int_0^l y\,v\,dx + \int_0^l \underbrace{((k\,y')' - q\,y + u)}_{=0}\psi\,dx = \int_0^l u\,\psi\,dx + \int_0^l (y\,v + ((k\,y')' - q\,y)\psi)\,dx =$$

$$= \langle u, \psi \rangle_{L^2(0,l)} + \langle y, v - q\,\psi \rangle_{L^2(0,l)} + \int_0^l (k\,y')'\psi\,dx$$

$$\int_0^l (k\,y')'\psi\,dx = \underbrace{k\,y'\,\psi\big|_0^l}_{\substack{\textit{потребуем} \\ \psi(0)=\psi(l)=0}} - \int_0^l k\,y'\,\psi'\,dx = -\underbrace{k\,\psi'\,y\big|_0^l}_{=0} + \int_0^l (k\,\psi')'y\,dx = \langle (k\,\psi')', y \rangle_{L^2(0,l)}$$

Итого:

$$\langle Au, v \rangle_{L^2(0,l)} = \langle u, \psi \rangle_{L^2(0,l)} + \langle y, (k\,\psi')' - q\,\psi + v \rangle_{L^2(0,l)}$$

Если ψ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} (k(x)\,\psi(x)')' - q(x)\,\psi(x) = -v(x), \\ \psi(0) = \psi(l) = 0, \end{cases}$$

то $A^*v = \psi$. Очевидно, что $A^*v = Av$, поэтому

$$J'(u) = 2\,A(y(\cdot; u) - z) = 2\,y(\cdot; y(\cdot; u) - z).$$

Задача 9 (4). *Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряжённым оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).*

Решение: По теореме Леви из закнутости L получаем $H = L \oplus L^\perp$, т.е. $\forall h \in H\ \exists! h_1 \in L$, $h_2 \in L^\perp$: $h = h_1 + h_2$.

$$\mathrm{pr}_L\,h = \operatorname*{arg\,min}_{p \in L} \rho(p, h) = \operatorname*{arg\,min}_{p \in L} \|h - p\|_H = \operatorname*{arg\,min}_{p \in L} \|h_1 + h_2 - p\|_H^2 =$$

$$\underset{\text{т.к. } h_1 - p \perp h_2}{=} \operatorname*{arg\,min}_{p \in L} \|h_1 - p\|_H^2 + \|h_2\|_H = h_1.$$

Линейность оператора pr_L очевидна, ограниченность следует из того, что

$$\|h_1\|_H^2 = \|h\|_H^2 - \|h_2\|_H^2 \leqslant \|h\|_H^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathrm{pr}_L\| = 1.$$

Покажем, что оператор проектирования самосопряжённый:

$$\langle \mathrm{pr}_L\,h, g \rangle_H = \langle h_1, g_1 + g_2 \rangle_H = \langle h_1, g_1 \rangle_H + \underbrace{\langle h_1, g_2 \rangle_H}_{=0} = \langle h_1, g_1 \rangle_H + \underbrace{\langle h_2, g_1 \rangle_H}_{=0} =$$

$$= \langle h_1 + h_2, g_1 \rangle_H = \langle h, \mathrm{pr}_L\,g \rangle_H \quad \Rightarrow \quad \mathrm{pr}_L^*\,g = \mathrm{pr}_L\,g.$$

Задача 10 (4). *Пусть x_0 — фиксированный элемент из H, $x_0 + L$ — соответствующее замкнутое линейное многообразие. Доказать, что тогда $p = \mathrm{pr}_{x_0+L}\,h$ в том и только в том случае, когда*

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, l \rangle_H = 0 \quad \forall l \in L.$$

Решение: $x_0 + L$ замкнуто (т.к. L замкнуто), выпукло (т.к. L — линейное подпространство). По теореме 10,

$$p = \mathrm{pr}_{x_0+L}\,h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle p - h, u - p \rangle_H \geqslant 0, \forall u \in x_0 + L, \\ p \in x_0 + L. \end{cases}$$

Если $p \in x_0 + L$, то $x_0 + L = p + L$, тогда первое условие переписывается в виде $\langle p - h, l \rangle_H \geqslant 0, \forall l \in L$. Если $l \in L$, то и $-l \in L$, поэтому:

$$\langle p - h, l \rangle_H \geqslant 0, \quad \langle p - h, -l \rangle_H = -\langle p - h, l \rangle_H \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \langle p - h, l \rangle_H = 0.$$

Задача 11 (4). *Выписать проекции точек на гиперплоскость* $\{ u \in H \mid \langle c, u\rangle_H = \beta\}$ *в гильбертовом пространстве* H *и на паралеллепипед* $\{ y = (u_1, \dots , u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, \dots , n\}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Решение:

1. $U = \{u \in H \mid \langle c, u\rangle_H = \beta\}$. Из результата предыдущей задачи следует, что
$$p = \operatorname{pr}_U h \quad \Leftrightarrow \quad \langle c, p\rangle_H = \beta, \quad \langle p - h, l\rangle_H = 0,\ \forall l : \langle c, l\rangle_H = 0.$$
Из второго соотношения следует, что $p - h = \alpha\, c$.
$$\langle c, h + \alpha\, c\rangle_H = \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\beta - \langle c, h\rangle_H}{\langle c, c\rangle_H} \quad \Rightarrow \quad p = h + \frac{\beta - \langle c, h\rangle_H}{\|c\|_H^2} c.$$

2. $U = \{y = (u_1, \dots , u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, \dots , n\}$. По теореме 10 получаем, что
$$p = \operatorname{pr}_U h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle p - h, u - p\rangle_H \geqslant 0, \forall u \in U, \\ p \in U \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (p_i - h_i)(u_i - p_i) \geqslant 0, \forall u \in U \\ \alpha_i \leqslant p_i \leqslant \beta_i, \forall i = 1, \dots , n. \end{cases}$$
Положив в первом неравенстве $u = (p_1, \dots , u_i, \dots , p_n)$, получим $(p_i - h_i)(u_i - p_i) \geqslant 0$, $\forall u_i$: $\alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i$. Неравенство будет выполнено, если
$$p_i = \begin{cases} \alpha_i, & h_i < \alpha_i, \\ h_i, & \alpha_i \leqslant h_i \leqslant \beta_i, \\ \beta_i, & h_i > \beta_i, \end{cases} = \max\{\alpha_i, \min\{\beta_i, h_i\}\}.$$

Задача 12 (3). *Выписать явное выражение для шага* α_k *метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала* $J(u) = \frac{1}{2}\langle A\, u, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H$ $(A^* = A \geqslant 0)$.

Решение:
$$\alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} J(u_k - \alpha J'(u_k)) = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} \left\langle \tfrac{1}{2} A(u_k - \alpha J'(u_k)) - f, u_k - \alpha J'(u_k)\right\rangle_H =$$
$$= \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} \tfrac{1}{2}\alpha^2 \langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H - \alpha \left(\left\langle \tfrac{1}{2} A\, J'(u_k), u_k\right\rangle_H + \left\langle \tfrac{1}{2} A u_k - f, J'(u_k)\right\rangle_H \right) + \left\langle \tfrac{1}{2} A u_k - f, u_k\right\rangle_H =$$
$$= \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} \tfrac{1}{2}\alpha^2 \langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H - \alpha \langle J'(u_k), A u_k - f\rangle_H =$$
$$= \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \geqslant 0} \tfrac{1}{2}\alpha^2 \langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H - \alpha \langle J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H$$
Если $\langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H > 0$, то
$$\alpha_k = \frac{\langle J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H}{\langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H} = \frac{\langle A u_k - f, A u_k - f\rangle_H}{\langle A(A u_k - f), A u_k - f\rangle_H}.$$
Данная задача оптимизации может быть некорректно поставленной (возможно $J_* = -\infty$). Если $\langle A\, J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H = 0$, то

1. Если $\langle J'(u_k), J'(u_k)\rangle_H = 0$, т.е. $J'(u_k) = 0$, то u_k является точкой минимума и $J_* = J(u_k) > -\infty$.

2. Если $J'(u_k) \neq 0$, то $\alpha_k = -\infty$ и $J_* = -\infty$, т.е. задача поставлена некорректно.

Задача 13 (5). *Доказать сходимость метода касательных (метода одномерной оптимизации).*

Решение:

Задача 14 (3). *Найти все угловые точки множества* $U = \big\{ u \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; u \geqslant 0,\ A\,u = b \big\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и исследовать их на невырожденность.

Решение: Воспользуемся критерием угловой точки. Решая системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

получаем соответственно точки

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad v^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Точка v^3 не является угловой, т.к. в ней $v_4 < 0$; все остальные точки угловые. Точки v^1 и v^5 — невырожденные, а $v^2 = v^4 = v^6$ — вырожденная угловая точка.

Задача 15 (4). *Доказать, что при выполнении условий теоремы о сходимости метода штрафных функций задача минимизации*

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U$$

является слабо корректной.

Решение: Дополнительно потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным.

Поскольку $U = \big\{ u \in U_0 \;\big|\; g_i^+(u) \leqslant 0 \big\}$, функции $g_i^+(u)$ слабо полунепрерывны снизу и множество U_0 слабо замкнуто, то U тоже слабо замкнуто. Для любого $\delta > 0$ выполняется $U \subseteq U(\delta)$, поэтому из ограниченности $U(\delta)$ следует ограниченность U. Так как U ограничено, а H сепарабельно, то любое подмножество U имеет слабую предельную точку, а следовательно U — слабый компакт. Но тогда выполнены все условия слабого варианта теоремы Вейерштрасса, и задача является слабо корректно поставленной.

Задача 16 (5). *Доказательство теоремы отделимости точки от непустого выпуклого множества в* $\mathbb{R}^n$.

Решение: Докажем, что если $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое, $a \notin \operatorname{int} A$, то a и A можно отделить, то есть $\exists \psi \neq 0$: $\langle x, \psi \rangle \geqslant \langle a, \psi \rangle$, $\forall x \in A$.

Для упрощения доказательства будем считать, что:

1. $a = 0$ (для произвольной точки a отделимость её от A эквивалентна отделимости 0 от $A - a$);

2. A замкнуто (если a и $\bar{A}$ отделимы, то a и A тем более отделимы).

Пусть сначала $0 \notin A$. Пусть $0 \neq b \in \arg\min_{x \in A} \|x\|$. $\langle x, x\rangle \geqslant \langle b, b\rangle, \forall x \in A$. Из выпуклости множества A следует, что $\forall \alpha \in [0,1]$, $\forall x \in A$ $b + \alpha(x-b) \in A$.

$$\langle b+\alpha(x-b), b+\alpha(x-b)\rangle \geqslant \langle b,b\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle b,b\rangle + 2\alpha\langle x-b,b\rangle + \alpha^2\langle x-b,x-b\rangle \geqslant \langle b,b\rangle \quad \Rightarrow$$

$$2\langle x-b,b\rangle + \alpha\langle x-b,x-b\rangle \geqslant 0.$$

При $\alpha \to 0$ получаем

$$\langle x-b,b\rangle \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x,b\rangle \geqslant \langle b,b\rangle > 0,$$

то есть 0 и A строго отделимы, $\psi = b$.

Рассмотрим теперь случай $0 \in \partial A$. По определению границы $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n$: $\|a_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, $a_n \notin A$. По уже доказанному, a_n и A можно отделить вектором ψ_n. Без ограничения общности можно считать, что $\|\psi\| = 1$. Так как в $\mathbb{R}^n$ единичный шар — компакт, то $\exists \{\psi_{n_k}\} \underset{k\to\infty}{\to} \psi$.

$$\forall x \in A: \quad \langle x,\psi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x,\psi_{n_k}\rangle \geqslant \lim_{k\to\infty}\langle a_{n_k},\psi_{n_k}\rangle = 0 = \langle \psi, 0\rangle,$$

то есть вектор ψ отделяет 0 от A.

Задача 17 (4). *Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) \mid F(x) = 0\}$, где $F(x) = x_1^2 - x_2^3$. Найти множество T_0M касательных векторов к M в точке $0 = (0,0)$. Верно ли равенство $T_0M = \operatorname{Ker} F'(0)$?*

Решение: Пусть $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \in T_0M$, тогда по определению

$$th + \varphi(t) \in M \quad \Leftrightarrow \quad (th_1 + \varphi_1(t))^2 = (th_2 + \varphi_2(t))^3.$$

Левая часть всегда неотрицательна, поэтому $th_2 + \varphi_2(t) \geqslant 0$, $\forall t$: $|t| < \varepsilon$, поэтому $h_2 = 0$. Пусть $h_1 \neq 0$, тогда

$$\underbrace{(th_1 + \varphi_1(t))^2}_{O(t^2)} = \underbrace{\varphi_2^3(t)}_{o(t^3)},$$

что невозможно, следовательно $h_1 = 0$, то есть $T_0M = \{0\}$.

$$F'(0)h = (2x_1h_1 - 3x_2h_2)|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} F'(0) = \mathbb{R}^2 \neq T_0M.$$

Задача 18 (5). *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, $\operatorname{Im} A$ замкнут в F, пространства H, F — гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^*$.*

Решение: Покажем, что для всех операторов $A \in \mathcal{L}(H \to F)$ верно разложение $F = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$.

$$\forall x \perp \overline{\operatorname{Im} A}: \ x \perp \operatorname{Im} A \quad \Rightarrow \quad \langle x, Ay\rangle_F = 0, \forall y \in H \quad \Rightarrow$$

$$\langle A^*x, y\rangle_H = 0, \forall y \in H \quad \Rightarrow \quad A^*x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} A^* \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} A^* \supset \overline{\operatorname{Im} A}^{\perp}.$$

$$\forall x \in \operatorname{Ker} A^*: A^*x = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle A^*x, y\rangle_H = 0, \forall y \in H \quad \Rightarrow \quad \langle x, Ay\rangle_F = 0, \forall y \in H \quad \Rightarrow \quad x \perp \operatorname{Im} A \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ker} A^* \subset \operatorname{Im}^{\perp} A = \overline{\operatorname{Im}^{\perp} A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} A^* = \overline{\operatorname{Im}^{\perp} A} \quad \Rightarrow \quad F = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Im} A}.$$

Задача 19 (4). *С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u\rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H. Здесь $A = A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$.*

Решение: Применим теорему о необходимых условиях оптимальности гладких задач.

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 \langle Au, u \rangle_H + \lambda_1 (1 - \|u\|_H^2).$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}(u, \lambda) = 2(\lambda_0 Au - \lambda_1 u) = 0.$$

$\lambda_0 \neq 0$, т.к. в противном случае $\lambda_1 = 0$, что противоречит $\lambda \neq 0$. Считаем $\lambda_0 = 1$, тогда $Au = \lambda_1 u$, то есть U_* состоит из единичных собственных векторов A.

$$J(u) = \langle Au, u \rangle_H = \langle \lambda_1 u, u \rangle = \lambda_1 \|u\|_H^2 = \lambda_1,$$

то есть J_* — минимальное собственное значение A, а U_* — все единичные собственные вектора A, отвечающие собственному значению J_*.

Задача 20 (3). *Доказать, что функция*

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}$$

является оптимальным управлением в задаче

$$J(u) = \int_0^4 (x(t) + u^2(t))\, dt \to \inf, \quad x'(t) = u(t), \quad 0 < t < 4, \quad x(0) = 0, \quad |u(t)| \overset{п.в.}{\leqslant} 1.$$

Решение:

$$J(u) = \int_0^4 x(t)\, dt + \int_0^4 u^2(t)\, dt = J_1(u) + \|u\|^2_{L^2(0,4)}.$$

Пусть $\|u\|_{L^2(0,4)} \leqslant 1$, тогда

$$|J_1(u)| = \left| \int_0^4 x(t)\, dt \right| = \left| \int_0^4 dt \int_0^t u(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \int_0^4 dt \int_0^t |u(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^4 dt \int_0^4 (1 + u^2(\xi))\, d\xi \leqslant \int_0^4 (4+1)\, dt = 20,$$

то есть $J_1(u)$ — линейный ограниченный функционал. По теореме Рисса

$$\exists c \in L^2(0,4): \quad J_1(u) = \langle c, u \rangle_{L^2(0,4)}.$$

$J(u) = \|u\|^2_{L^2(0,4)} + \langle u, c \rangle_{L^2(0,4)} = \left\| u - \frac{1}{2}c \right\|^2_{L^2(0,4)} - \frac{1}{4}\|c\|^2_{L^2(0,4)}$ — сильно выпуклый непрерывный функционал, множество $U = \left\{ u \in L^2(0,4) \;\middle|\; |u| \leqslant 1 \text{ п.в.} \right\}$ выпуклое и замкнутое, поэтому по сильно выпуклому варианту теоремы Вейерштрасса $\exists! u_* \in U_*$. u_* удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, а данное в задаче управление — единственное (с точностью до множества нулевой меры), удовлетворяющее принципу максимума, поэтому почти всюду $u_*(t) = u(t)$.

Задача 21 (4). *Доказать линеаризованный принцип максимума.*

Решение: Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, тогда по критерию экстремальности для любых $v(\cdot) \in U$ выполняется неравенство

$$\langle J'(u), v - u \rangle_{L^2(t_0,T)} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \langle H_u(x(\cdot), u(\cdot), \psi(\cdot), \cdot), v(\cdot) - u(\cdot) \rangle_{L^2(t_0,T)} \geqslant 0.$$

Пусть $v_0 \in V$, положим

$$v_D(t; v_0) = \begin{cases} v_0, & t \in D \subset (t_0, T); \\ u(t), & t \in D^C. \end{cases}$$

Тогда для любого измеримого множества D выполняется

$$\langle J'(u), v_D(\cdot; v_0) - u \rangle_{L^2(t_0,T)} = \int_D \langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), v_0 - u(t) \rangle_{\mathbb{R}^r} \, dt \geqslant 0.$$

Но это означает, что почти всюду для любого $v_0 \in V$

$$\langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), v_0 - u(t) \rangle_{\mathbb{R}^r} \geqslant 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), v_0 \rangle_{\mathbb{R}^r} \geqslant \langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^r} \quad \Rightarrow$$

$$\langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^r} = \min_{v_0 \in V} \langle H_u(x(t), u(t), \psi(t), t), v_0 \rangle_{\mathbb{R}^r}.$$